RICERCA OPERATIVA

11/10/2010

lea.unipr.it → materiale : dispense, slides
↓ forum !!
↓ abbondanti

Esame : due compitini o sessione regolare (mantenuta da divisione).
Orale non obbligatorio. Scritto con esercizi + teoria.
1,5 ore per ogni parte.

Nella valutazione rientrerà un progettino con un linguaggio di modellizzazione: relazione di 5/6 pagine. Nessun vincolo di tempo.
Progettino obbligatorio, possibile farlo in coppia.

L'oggetto di cui si occupa la ricerca operativa sono i problemi di decisione complessi, ovvero con un ampio spazio di scelte possibili.

1) Individuazione delle componenti del problema di decisione:
- dati (input)
- variabili
- vincoli
- obiettivo (miglior scelta possibile)

2) Programmazione matematica per creare modelli matematici
- i dati sono già solitamente dei numeri
- alle variabili si associano $x_1, x_2, \dots, x_n$ che possono essere reali o interi
- i vincoli si esprimono con disequazioni o equazioni
- l'obiettivo diventa una funzione matematica.

Non si usa mai < o > strettamente, ma sempre $\geq, \leq$ o $=$.
L'obiettivo assegna a ogni scelta un valore.
L'obiettivo sarà massimizzare o minimizzare la funzione obiettivo sull'insieme definito dai vincoli del problema, detto REGIONE AMMISSIBILE S.

3) Risolvere il modello, cioè trovare la soluzione ottima.

4) Validare il modello.

ESERCITAZIONE 1

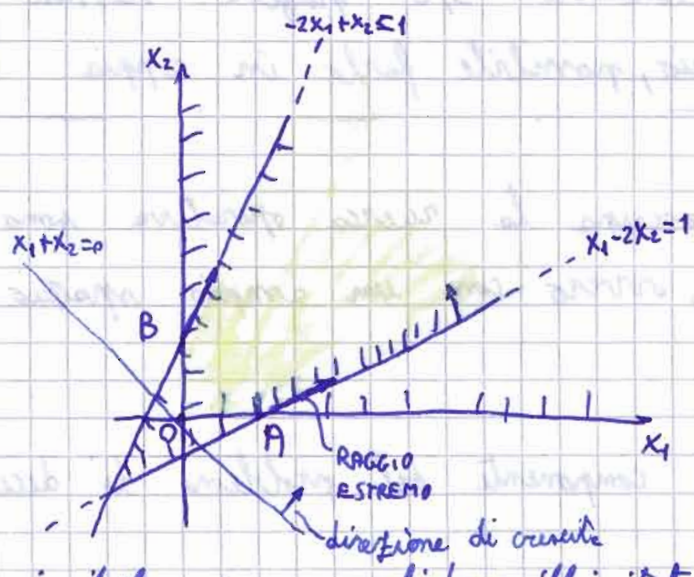
①

MAX x_1+x_2

$x_1-2x_2 \leq 1$

$-2x_1+x_2 \leq 1$

$x_1, x_2 \geq 0$



VERTICI

O (0,0)

A (1,0)

B (0,1)

La regione ammissibile è un poliedro illimitato con 3 vertici e 2 raggi estremi.
$S_{OTT}=\emptyset$ in quanto l'obiettivo è illimitato su S_a.

Vediamo ora la soluzione con l'algoritmo del simplesso.

MAX x_1+x_2

$x_1-2x_2+y_1=1$

$-2x_1+x_2+y_2=1$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$

Dato che y_1 e y_2 compaiono una sola volta e hanno lo stesso segno del termine noto, prendo come base ammissibile $\{y_1, y_2\}$.

$\text{MAX } x_1+x_2$

$y_1 = 1 - x_1 + 2x_2$

$y_2 = 1 + 2x_1 - x_2$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$

Le costanti sono tutte ≥ 0 per cui la base è ammissibile

$x_1 = x_2 = 0$ variabili fuori base

$y_1 = y_2 = 1$ variabili in base

Il valore dell'obiettivo è 0.

In questo momento l'algoritmo si trova nel vertice $O(0,0)$ essendo $x_1=x_2=0$.

Def: Un vertice è non degenere se per esso passano n iperpiani (rette se $n=2$) che definiscono la regione ammissibile, dove n è il numero di dimensioni (variabili).

$B_1 = \{x_1, y_2\}$

$\text{MAX. } 1 - y_1 + 3x_2$

$x_1 = 1 - y_1 + 2x_2$

$y_2 = 3 - 2y_1 + 3x_2$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$

La soluzione di base è, ovviamente, ammissibile e non degenere.

$x_1 = 1 \quad y_2 = 3$

$x_2 = 0 \quad y_1 = 0$

Ci siamo spostati in A

Il valore dell'obiettivo è 1.

Provo a prendere $x_1 = t$ e $x_2 = 0$ con $0 \leq t \leq 1$; ottengo $y_1 = 1-t$ e $y_2 = 1+2t$. Vedo che mi sono spostato lungo il lato OA.

Noto che è verificata la condizione di illimitatezza in quanto x_2 ha coefficiente positivo nell'obiettivo e nei vincoli.

Infatti: $y_1 = 0 \quad x_2 = t \quad x_1 = 1+2t \quad y_2 = 3+3t$ sono tutti punti $\in S_a$. Il valore dell'obiettivo è $1+3t \xrightarrow[t\to\infty]{} +\infty$.

$\begin{cases} x_1 = 1+2t \\ x_2 = t \end{cases}$ è proprio la semiretta $A \to \infty$.

②

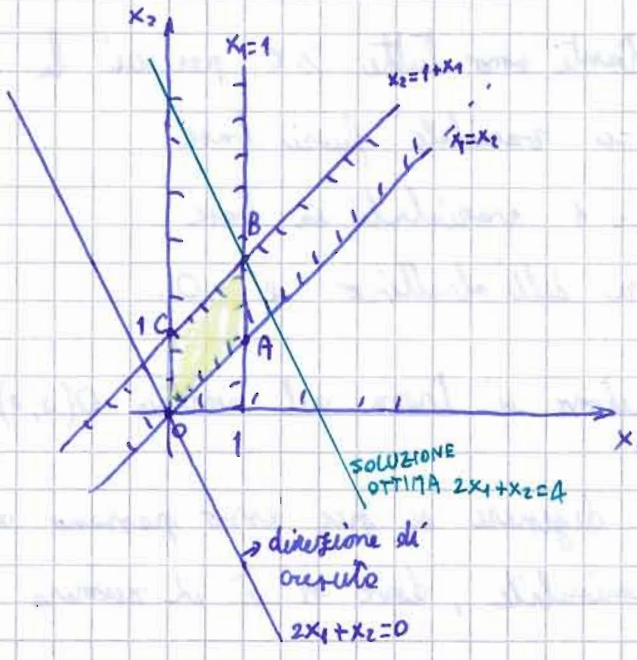
MAX $2x_1+x_2$

$x_1-x_2 \le 0$

$-x_1+x_2 \le 1$

$x_1 \le 1$

$x_1, x_2 \ge 0$



VERTICI

O(0,0) degenere

A(1,1) non degenere

B(1,2) non degenere

C(0,1) non degenere

$S_{OTT} = \{B\}$

valore obiettivo ottimo $= 4$

Con l'algoritmo del simplesso:

MAX $2x_1+x_2$

$x_1-x_2+y_1=0$

$-x_1+x_2+y_2=1$

$x_1+y_3=1$

$x_1,x_2,y_1,y_2,y_3 \ge 0$

$\longrightarrow$

$B_0=\{y_1,y_2,y_3\}$ base ammissibile iniziale.

MAX $2x_1+x_2$

$y_1=x_2-x_1$

$y_2=1+x_1-x_2$

$y_3=1-x_1$

$x_1,x_2,y_1,y_2,y_3 \ge 0$

Soluzione di base ammissibile e degenere

$x_1=x_2=0 \rightarrow$ sono nell'origine

$y_1=0 \quad y_2=1 \quad y_3=1$

valore obiettivo $=0$

Non è verificata la condizione di illimitatezza né quella di ottimalità.

x_1 è bloccata a 0 dal primo vincolo, quindi y_1 abbandona la base.

$B_1=\{x_1,y_2,y_3\}$

MAX $-2y_1+3x_2$

$x_1=x_2-y_1$

$y_2=1-y_1$

$y_3=1+y_1-x_2$

$x_1,x_2,y_1,y_2,y_3 \ge 0$

$y_1=0 \quad x_2=0 \Rightarrow x_1=0 \quad y_2=1 \quad y_3=1$

Ritrovo la stessa soluzione di prima ma questa volta O(0,0) è identificato dalle rette $y_1=0$ e $x_2=0$, cioè $x_2=0$ e x_1-x

Entra x_2 ed esce y_3 essendo l'unica equazione in cui compare con coefficiente negativo.

non degenere perché > 0 le costanti

$B_2 = \{x_1, y_2, x_2\}$

MAX $3 + y_1 - 3y_3$ $\quad$ $y_1 = 0 \quad y_3 = 0$

$x_1 = 1 - y_3$ $\quad$ $x_1 = 1 \quad y_2 = 1 \quad x_2 = 1$

$y_2 = 1 - y_1$ $\quad$ valore obiettivo pari a 3.

$x_2 = 1 + y_1 - y_3$ $\quad$ Ci siamo spostati nel punto A

$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$ $\quad$ $y_1 = 0 \quad x_2 = t \rightarrow x_1 = t \quad y_2 = 1 \quad y_3 = 1 - t$.

Devo continuare perché i coefficienti di y_1 non hanno tutti lo stesso segno

$B_3 = \{x_1, y_1, x_2\}$ Entra y_1 perché è l'unica con coefficiente positivo nell'obiettivo. Esce y_2 perché è l'unica equazione in cui il coefficiente di y_1 è negativo.

MAX $4 - y_2 - 3y_3$ $\quad$ $y_2 = 0 \quad y_3 = 0 \rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = 2 \quad y_1 = 1$

$x_1 = 1 - y_3$ $\quad$ valore obiettivo pari a 4.

$y_1 = 1 - y_2$ $\quad$ Ci siamo spostati nel punto B.

$x_2 = 2 - y_2 - y_3$

$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$

Coefficienti di costo nell'obiettivo tutti $\leq 0 \Rightarrow$ verifica la condizione di ottimalità. Essendo poi tutti i coefficienti strettamente negativi, la soluzione ottima è unica.

Es. 3 DUALITÀ

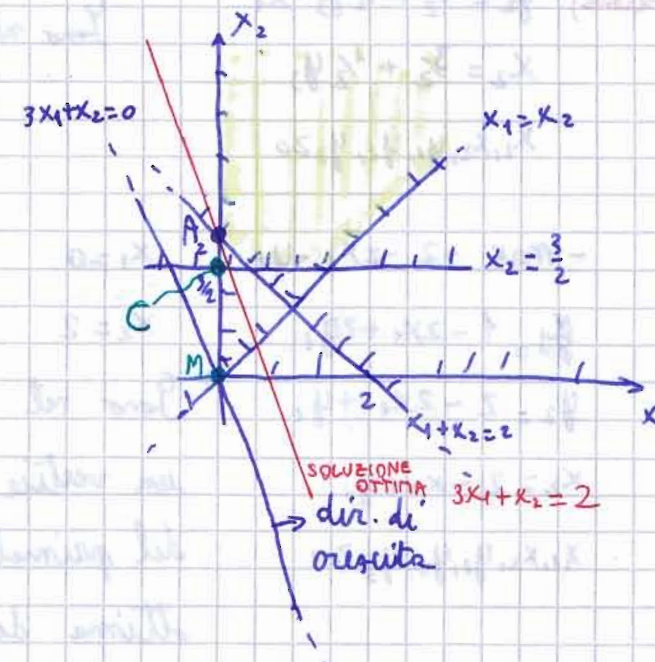
min $3x_1 + x_2$

$x_1 + x_2 \geq 2$

$-x_1 + x_2 \geq 0$

$2x_2 \geq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$



$S_{OTT} = \{A\}$ $\quad$ $A(0,2)$

valore ottimo $= 2$

$-\max \; -3x_1 - x_2$

$x_1 + x_2 - y_1 = 2$

$-x_1 + x_2 - y_2 = 0$

$2x_2 - y_3 = 3$

$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$

Problema in forma standard

Scelgo la base $B_0 = \{y_1, y_2, y_3\}$ dato che compaiono in unico vincolo.
B_0 è ammissibile nel duale → simplesso duale.

$-\max \; -3x_1 - x_2$

$y_1 = -2 + x_1 + x_2$

$y_2 = -x_1 + x_2$

$y_3 = -3 + 2x_2$

$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$

$x_1, x_2 = 0$ ⇓ $y_1 = -2$, $y_2 = 0$ ← degenere, $y_3 = -3$

Mi trovo nel punto $M \notin S_a$.

Applico il simplesso duale (non soddisfatta ottimalità e illimitatezza).
Esce dalla base y_3 (termine noto più piccolo) ed entra x_2 (unica con coefficiente positivo).

$B_1 = \{y_1, y_2, x_2\}$

$-\max \; -\frac{3}{2} - 3x_1 - \frac{1}{2}y_3$

non c'è ammissibilità primale (no ottima) $y_1 = -\frac{1}{2} + x_1 + \frac{1}{2}y_3$ non c'è illimitatezza

$y_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}y_3 - x_1$

$x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}y_3$

$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$

$x_1 = 0 \quad y_3 = 0$

$x_2 = \frac{3}{2} \quad y_1 = -\frac{1}{2} \quad y_2 = \frac{3}{2}$

Sono nel punto $C(0, \frac{3}{2})$

$B_2 = \{y_3, y_2, x_2\}$

entra y_3 e non x_2 per i minimi rapporti

$x_1: -\frac{-3}{1} = 3$

$y_3: -\frac{-1/2}{1/2} = 1 = $ minimo

$-\max \; -2 - 2x_1 - y_1$

$y_3 = 1 - 2x_1 + 2y_1$

$y_2 = 2 - 2x_1 + y_1$

$x_2 = 2 - x_1 + y_1$

$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$

$x_1 = 0 \quad y_1 = 0$

$x_2 = 2 \quad y_2 = 2 \quad y_3 = 1$

val. ottimo = 2

Sono nel punto $A(0,2)$ che, essendo un vertice della regione ammissibile del primale, è la soluzione ottima del primale.

Scrivo ora il duale in forma standard:

$$\begin{aligned} -\max\ & -3x_1 - x_2 \\ & x_1 + x_2 - y_1 = 2 \quad \Leftrightarrow u_1 \\ & -x_1 + x_2 - y_2 = 0 \quad \Leftrightarrow u_2 \\ & 2x_2 - y_3 = 3 \quad \Leftrightarrow u_3 \\ & x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} -\min\ & 2u_1 + 3u_3 \\ & u_1 - u_2 \geq -3 \quad \Leftrightarrow x_1 \\ & u_1 + u_2 + 2u_3 \geq -1 \quad \Leftrightarrow x_2 \leftarrow \\ & -u_1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow y_1 \\ & -u_2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow y_2 \leftarrow \\ & -u_3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow y_3 \leftarrow \end{aligned}$$

$x_1 = 0 \quad y_1 = 0$

$x_2 = 2 \quad y_2 = 2 \quad y_3 = 1$

Nella soluzione ottima del duale avrò:

$$\begin{cases} u_1^* + u_2^* + 2u_3^* = -1 \\ -u_2^* = 0 \\ -u_3^* = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1^* = -1 \\ u_2^* = 0 \\ u_3^* = 0 \end{cases}$$

che infatti dà 2 come valore dell'obiettivo.

Esercizio II

$$\begin{aligned} \text{MAX}\ & x_2 - x_1 \\ & x_1 + x_2 \leq \tfrac{7}{2} \\ & -x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$Z_{ott} = \{D\} \quad D(0,3)$

Valore ottimo $= 3$

Risoluzione con Branch and Bound

Trasformo in forma standard

$$\begin{aligned} \text{MAX}\ & x_2 - x_1 \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ & -x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \text{MAX}\ & x_2 - x_1 \\ & 2x_1 + 2x_2 + y_1 = 7 \\ & -x_1 + x_2 + y_2 = 4 \\ & x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$B_0 = \{y_1, y_2\}$

MAX $x_2 - x_1$

$y_1 = 7 - 2x_1 - 2x_2$

$y_2 = 4 + x_1 - x_2$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$

Soluzione di base:

$x_1 = x_2 = 0$ (sono nell'origine)

$y_1 = 7 \quad y_2 = 4$

↓

è a coordinate intere, quindi è anche soluzione ammissibile per PLI

$LB = \cancel{x} = 0$

$\boxed{\begin{matrix} x_1^* = 0 \\ x_2^* = 0 \end{matrix}}$

S $U(S)$

Cambio la base: esce y_1 ed entra x_2

$B_1 = \{x_2, y_2\}$

MAX $\frac{7}{2} - 2x_1 - \frac{1}{2}y_1$

$x_2 = \frac{7}{2} - x_1 - \frac{1}{2}y_1$

$y_2 = \frac{1}{2} + 2x_1 + \frac{1}{2}y_1$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$

Soluzione di base:

$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{7}{2}$

$y_1 = 0 \quad y_2 = \frac{1}{2}$

Valore obiettivo $= \frac{7}{2}$

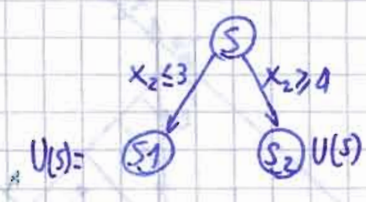
$LB = 0$

$x_1^* = 0$

$x_2^* = 0$

S $U(S) = \frac{7}{2}$

Suddivido S in due sottoinsiemi: $x_2 \leq 3$ e $x_2 \geq 4$



S2

MAX $\frac{7}{2} - 2x_1 - \frac{1}{2}y_1$

$x_2 = \frac{7}{2} - x_1 - \frac{1}{2}y_1$

$y_2 = \frac{1}{2} + 2x_1 + \frac{1}{2}y_1$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$

$x_2 \geq 4 \iff x_2 - y_3 = 4, \; y_3 \geq 0$

duale ammissibile

$B_0' = \{x_2, y_2, y_3\} \implies$

MAX $\frac{7}{2} - 2x_1 - \frac{1}{2}y_1$

$x_2 = \frac{7}{2} - x_1 - \frac{1}{2}y_1$

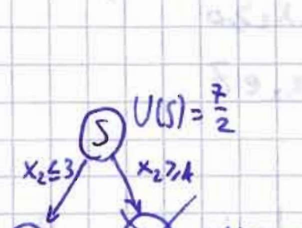
$y_2 = \frac{1}{2} + 2x_1 + \frac{1}{2}y_1$

$y_3 = -\frac{1}{2} - x_1 - \frac{1}{2}y_1$

$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$

non ammissibile per il problema primale (sempre così).

condizione di illimitatezza



(S_1) $\max \frac{7}{2} - 2x_1 - \frac{1}{2}y_1$

$x_2 = \frac{7}{2} - x_1 - \frac{1}{2}y_1$

$y_2 = \frac{1}{2} + 2x_1 + \frac{1}{2}y_1$

$x_2 \leq 3 \rightarrow x_2 + y_3 = 3$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$

$\Rightarrow$

$\max \frac{7}{2} - 2x_1 - \frac{1}{2}y_1$

$x_2 = \frac{7}{2} - x_1 - \frac{1}{2}y_1$

$y_2 = \frac{1}{2} + 2x_1 + \frac{1}{2}y_1$

$y_3 = -\frac{1}{2} + x_1 + \frac{1}{2}y_1$

$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$

$B_0' = \{x_2, y_2, y_3\}$

Base non ammissibile per il problema primale, perchè in corrispondenza della soluzione ottima $y_3 = -\frac{1}{2} < 0$.

Rapporti: $x_1 \rightarrow -\frac{-2}{1} = 2$

$y_1 \rightarrow -\frac{-1/2}{1/2} = 1 \rightarrow y_1$ entra in base. Esce y_3 (unica possibile)

$B_1' = \{x_2, y_2, y_1\}$

Il simplesso duale si arresta (coeff. positivi)

$\max 3 - y_3 - x_1$

$x_2 = 3 - y_3$

$y_2 = 1 + x_1 + y_3$

$y_1 = 2y_3 + 1 - 2x_1$

$x_1 = 0$

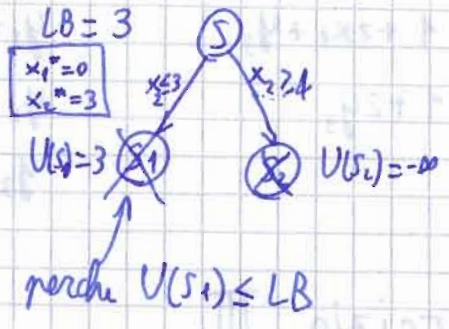
$x_2 = 3$

$y_1 = 1$

$y_2 = 1$

$y_3 = 0$

Valore obiettivo $= 3$



Fine.

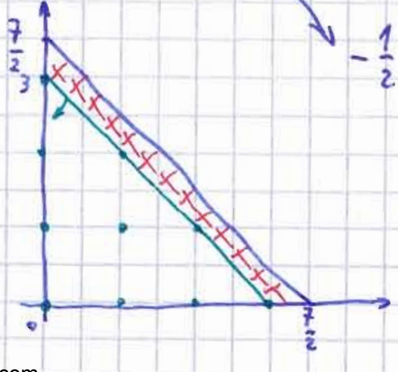
Taglio

Considero $x_2 = \frac{7}{2} - x_1 - \frac{1}{2}y_1$. L'equazione generatrice del taglio è

$-\frac{1}{2} + 0x_1 + \frac{1}{2}y_1 \geq 0$ cioè $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(7 - 2x_1 - 2x_2) \geq 0 \rightarrow 3 - x_1 - x_2 \geq 0$

mantissa, mantissa, mantissa

$x_1 + x_2 \leq 3$



$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}y_1 - y_3 = 0$

$y_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}y_1$

Ripartendo da:

$$\text{MAX } \frac{7}{2} - 2x_1 - \frac{1}{2}y_1$$

$$x_2 = \frac{7}{2} - x_1 - \frac{1}{2}y_1$$

$$y_2 = \frac{1}{2} + 2x_1 + \frac{1}{2}y_1$$

$$y_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}y_1$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Cambio la base: esce y_3 (unica variabile in base con coefficiente negativo) ed entra y_1 (coefficiente positivo)

$$B_1' = \{x_2, y_2, y_1\}$$

$\text{MAX } 3 - y_3 - 2x_1$ $\quad x_1 = 0$

$x_2 = 3 - y_3 - x_1$ $\quad x_2 = 3$

$y_2 = 1 + 2x_1 + y_3$ $\quad y_1 = 1$

$y_1 = 1 + 2y_3$ $\quad y_2 = 1$

$y_3 = 0$

Valore ottimo = 3

$\boxed{x_1 = 0,\ x_2 = 3}$ coordinate intere → stop.

<u>STOP</u>

Esercizio III

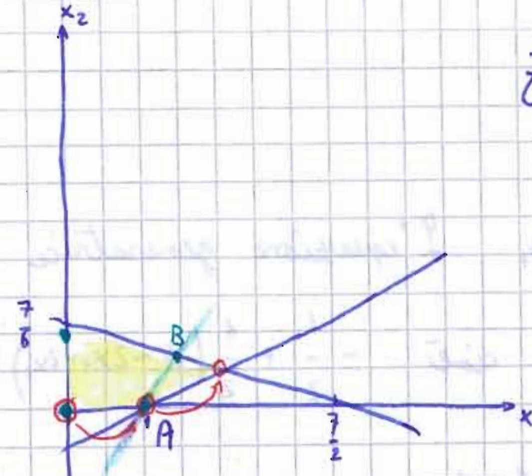
MAX x_1

$x_1 - 2x_2 \leq 1$

$2x_1 + 6x_2 \leq 7$

$x_1, x_2 \geq 0$

$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$



$Z_{OTT} = \{A\}$ $\quad A(1,0)$

Forma standard:

MAX x_1

$x_1 - 2x_2 + y_1 = 1$

$2x_1 + 6x_2 + y_2 = 7$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$

$B_0 = \{y_1, y_2\}$

$\text{MAX } x_1 \qquad\qquad x_1 = x_2 = 0$

$y_1 = 1 - x_1 + 2x_2 \qquad\qquad y_1 = 1$

$y_2 = 7 - 2x_1 - 6x_2 \qquad\qquad y_2 = 7$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0 \qquad\qquad \text{Val. ob.} = 0$

Applico l'algoritmo del simplesso (condizioni non verificate). Cambio base: esce y_1 ed entra x_1.

$B_1 = \{x_1, y_2\}$

$\text{MAX } 1 - y_1 + 2x_2 \qquad\qquad x_1 = 1 \qquad \text{Val. ob.} = 1$

$x_1 = +1 - y_1 + 2x_2 \qquad\qquad x_2 = 0$

$y_2 = 5 + 2y_1 - 10x_2 \qquad\qquad y_1 = 0$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0 \qquad\qquad y_2 = 5$

Cambio base perchè la condizione di ottimalità e illimitatezza non sono soddisfatte. Entra x_2 ed esce y_2

$\text{MAX } 2 - \frac{3}{5}y_1 - \frac{1}{5}y_2$

$x_1 = 2 - \frac{3}{5}y_1 - \frac{1}{5}y_2 \qquad\qquad x_1 = 2$

$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}y_1 - \frac{1}{10}y_2 \qquad\qquad x_2 = \frac{1}{2}$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0 \qquad\qquad y_1 = y_2 = 0$

$\text{Val. ob.} = 2$

Ho risolto il rilassamento lineare. Genero il primo taglio di Gomory. L'equazione generatrice del taglio però solo essere quella di x_2 (x_1 ha termine noto intero): $-\frac{1}{2} + \frac{4}{5}y_1 + \frac{1}{10}y_2 \geq 0$

$-\frac{1}{5} - \left\lfloor -\frac{1}{5} \right\rfloor = +\frac{4}{5}$

$$-\frac{1}{2} + \frac{4}{5}\left(1 - x_1 + 2x_2\right) + \frac{1}{10}\left(7 - 2x_1 - 6x_2\right) \geq 0 \rightarrow 1 - x_1 + x_2 \geq 0 \rightarrow x_1 - x_2 \leq 1$$

Il nuovo rilassamento lineare avrà B come soluzione ottima.

Risolvo il simplesso duale: $B_0' = \{x_1, x_2, y_3\}$

$\text{MAX} \quad 2 - \frac{3}{5}y_1 - \frac{1}{5}y_2$

$x_1 = 2 - \frac{3}{5}y_1 - \frac{1}{5}y_2$

$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}y_1 - \frac{1}{10}y_2$

$y_3 = -\frac{1}{2} + \frac{4}{5}y_1 + \frac{1}{10}y_2$

$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$

Esce y_3, entra: $y_1 \to -\frac{-3/5}{4/5} = 3/4$

$y_2 \to -\frac{-1/5}{1/10} = 2$

$B_1' = \{x_1, x_2, y_1\}$

$\text{MAX} \quad 13/8 - 3/4\, y_3 - 1/8\, y_2$

$x_1 = 13/8 - 3/4\, y_3 - 1/8\, y_2$

$x_2 = 5/8 + 1/4\, y_3 - 1/8\, y_2$

$y_1 = 5/8 - 1/8\, y_2 + 5/4\, y_3$

Aggiungo un ulteriore taglio: scelgo x_1..

$$-\frac{5}{8} + \frac{3}{4}y_3 + \frac{1}{8}y_2 \geq 0 \rightarrow -\frac{5}{8} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2} + \frac{4}{5}y_1 + \frac{1}{10}y_2\right) + \frac{1}{8}y_2 \geq 0$$

$$-1 + \frac{3}{5}y_1 + \frac{1}{5}y_2 \geq 0 \rightarrow -1 + \frac{3}{5}(1 - x_1 + 2x_2) + \frac{1}{5}(7 - 2x_1 - 6x_2) \geq 0 \rightarrow 1 - x_1 \geq 0 \quad x_1 \leq 1$$

Esercizio 1 MAXFLOW

Flusso massimo?

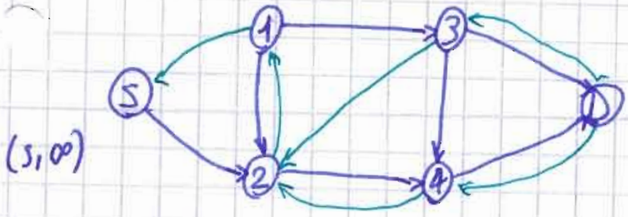
Taglio minimo?

Il flusso iniziale è ammissibile. 1) quantità > 0

2) quantità $\leq$ capacità

3) flusso entrante = flusso uscente.

Il grafo associato al flusso è

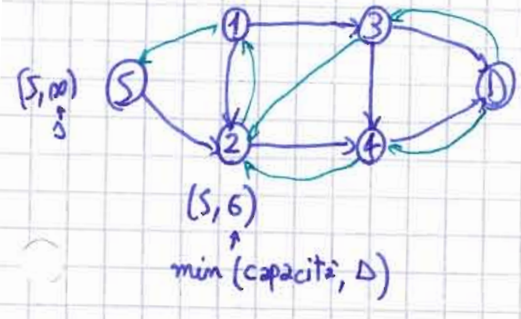


ARCHI FORWARD
ARCHI BACKWARD

E	R
S	/

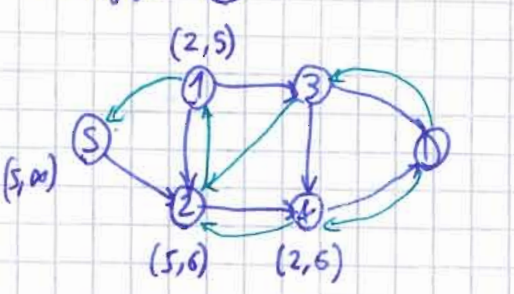
$G(\bar{x})$

Seleziono e analizzo (S)



E	R
S, 2	S

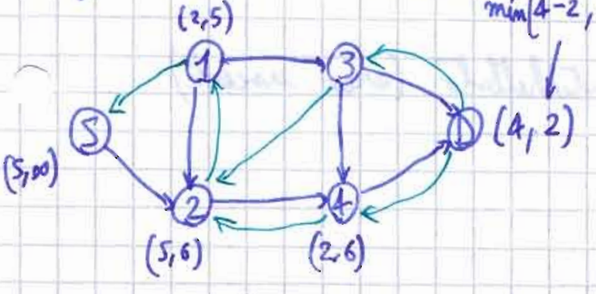
Analizzo (2)



E	R
S, 2, 1, 4	S, 2

Scelgo di analizzare (4)

$\min(4-2, 6) = 2 = \Delta$

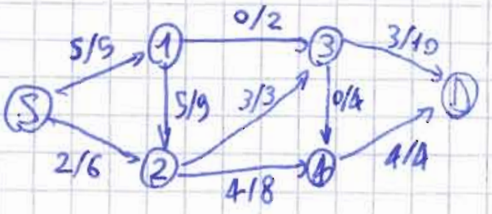


E	R
S, 2, 1, 4, D	S, 2, 4

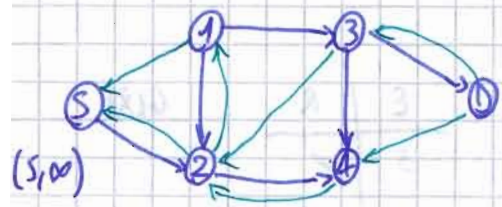
STOP

$S \xrightarrow{+} 2 \xrightarrow{+} 4 \xrightarrow{+} D$

Incremento di Δ il flusso sugli archi. Il nuovo flusso diventa

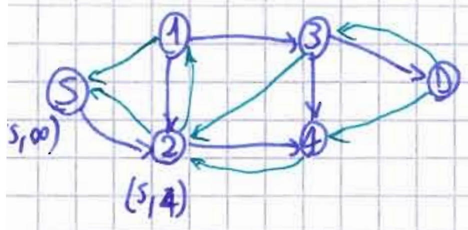


Il grafo associato al flusso è:



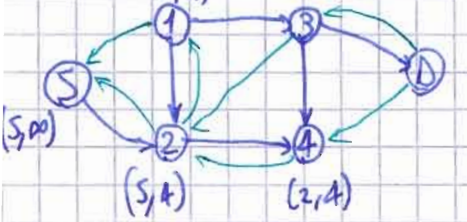
E	R
S	

Seleziono (S)



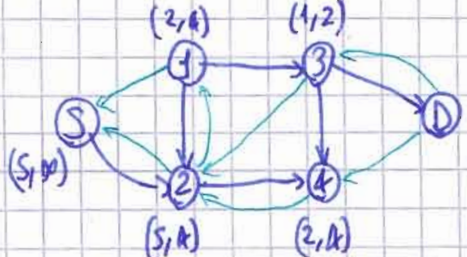
E	R
S, 2	S

Seleziono (2)



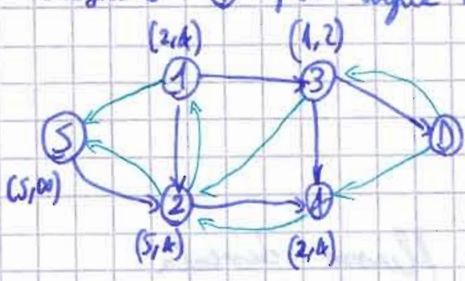
E	R
S, 2, 1, 4	S, 2

Seleziono (1)



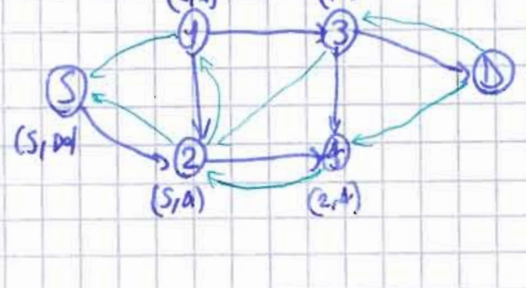
E	R
S, 2, 1, 4, 3	S, 2, 1

Seleziono (4) per logica FIFO, ma (2) è già stato etichettato (arco uscente)



E	R
S, 2, 1, 4, 3	S, 2, 1, 4

Seleziono (3)



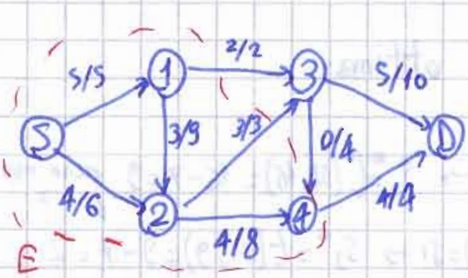
D ↓ (3, 2)

E	R
S, 2, 1, 4, 3, D	S, 2, 1, 4, 3

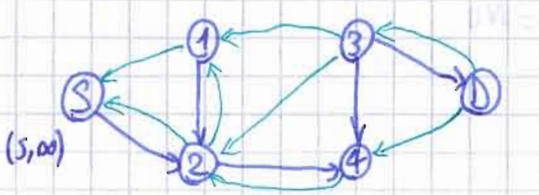
STOP

$$S \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{b} 1 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{f} D \qquad \Delta = 2$$

Incremento di Δ il flusso su archi forward e decremento i backward.



Il grafo associato è:

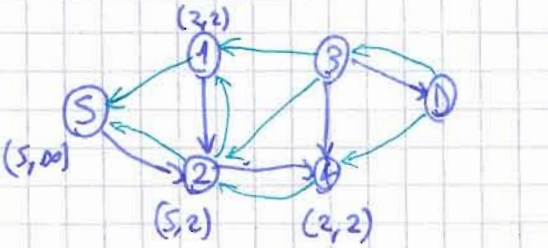


E	R
S	

Seleziono Ⓢ

E	R
S, 2	S

Seleziono ②



E	R
S,2,4,1	S,2

Seleziono ①, ma sia Ⓢ che ② sono già stati etichettati.

E	R
S,2,4,1	S,2,1

Seleziono ④, ma il nodo ② è già stato etichettato.

E	R
S,2,4,1	S,2,1,4

STOP.

$E = \{S, 1, 2, 4\}$ $\quad S_E = \{(1,3), (2,3), (4,D)\}$

$C(S_E) = 2 + 3 + 4 = 9$ somma capacità archi in S_E.

↑ costo del taglio

9 è esattamente uguale al flusso uscente da S e al flusso entrante in
Inoltre, gli archi in S_E sono tutti saturi come ci aspettavamo.

s	f_4^*	d_4^*	f_3^*	d_3^*	f_2^*	d_2^*	f_1^*	d_1^*
0	0	N	0	N	0	N		
1	0	N	0	N	0	N		
2	0	N	0	N	0	N		
3	0	N	0	N	0	N		
4	1	S	1	N	1	N		
5	1	S	1	N	1	N		
6	1	S	1	N	1	N		
7	1	S	1	N	6	S		
8	1	S	1	N	6	S		
9	1	S	1	N	6	S		
10	1	S	1	N	6	S		
11	1	S	1	N	7	S		
12	1	S	1	N	7	S		
13	1	S	10	S	10	N		
14	1	S	10	S	10	N		
15	1	S	10	S	10	N		
16	1	S	10	S	10	N	14	SI

$$D_4(s_4) = \begin{cases} \{NO\} & s_4 < 4 \\ \{NO, SI\} & s_4 \geq 4 \end{cases}$$

$$D_3(s_3) = \begin{cases} \{NO\} & s_3 < 13 & NO \rightarrow U(NO, s_3) + f_4^*(t(NO, s_3)) = 0 + f_4^*(s_3) \\ \{NO, SI\} & s_3 \geq 13 & SI \rightarrow U(SI, s_3) + f_4^*(t(SI, s_3)) = 10 + f_4^*(s_3 - 13) \end{cases}$$

$$D_2(s_2) = \begin{cases} \{NO\} & s_2 < 7 & NO \rightarrow U(NO, s_2) + f_3^*(t(NO, s_2)) = 0 + f_3^*(s_2) = f_3^*(s_2) \\ \{NO, SI\} & s_2 \geq 7 & SI \rightarrow U(SI, s_2) + f_3^*(t(SI, s_2)) = 6 + f_3^*(s_2 - 7) \end{cases}$$

$$D_1(s_1) = \begin{cases} \{NO\} & s_1 < 7 & NO \rightarrow U(NO, 16) + f_2^*(t(NO, 16)) = 0 + f_2^*(16) = 10 \\ \{NO, SI\} & s_1 \geq 7 & SI \rightarrow U(SI, 16) + f_2^*(t(SI, 16)) = 8 + f_2^*(16 - 7) = 8 + f_2^*(9) = 14 = \max \end{cases}$$

16 unico stato

$f_1^*(16) = 14 \qquad d_1^*(16) = SI$

Decisione ottima

$d_1^*(16) = SI \rightarrow s_2^* = t(SI, 16) = 16 - 7 = 9$ peso oggetto 2

$d_2^*(s_2^*) = d_2^*(9) = SI \rightarrow s_3^* = t(SI, 9) = 9 - 7 = 2$

$d_3^*(s_3^*) = d_3^*(2) = NO \rightarrow s_4^* = t(NO, 2) = 2 - 0 = 2$

$d_4^*(s_4^*) = d_4^*(2) = NO$

Esercizi Programmazione Dinamica

①

	f_5^*	d_5^*	f_4^*	d_4^*	f_3^*	d_3^*	f_2^*	d_2^*	f_1^*	d_1^*
0	0	N	0	N	0	N	0	N		
1	4	S	4	N	4	N	4	N		
2	4	S	4	N	31	S	31	N		
3	4	S	4	N	35	S	35	N		
4	4	S	4	N	35	S	44	S		
5	4	S	48	S	48	N	48	N o S		
6	4	S	52	S	52	N	75	S		
7	4	S	52	S	79	S	79	N o S		
8	4	S	52	S	83	S	83	N	88	S

↑
capacità residua

4 → N: $0 + f_5^*(s_4)$ se la capacità residua è <5, la scelta è
S: $48 + f_5^*(s_4 - 5)$ per forza No

$s_4 = 5$ → N = 4
S = 48 + 0 = 48 prendo il SI

$s_4 = 6$ → N = 4
S = 48 + 4 = 52 prendo il SI
$f_5^*(6-5=1)$

$s_4 = 7$ N = 4
S = 52

$s_4 = 8$ N = 4
S = 52

3 → N: $0 + f_4^*(s_3)$
S: $31 + f_4^*(s_3 - 2)$

$s_3 = 2$ → N = 4
S = 31 + 0 = 31 prendo il SI

$s_3 = 3$ → N = 4
S = 31 + 4 = 35

$s_3 = 4$ → N = 4
S = 35

$s_3 = 5$ → N = 48 prendo il NO
S = 31 + 4 = 35

$s_3 = 6$ → N = 52
S = 31 + 4 = 35

$s_3 = 7$ → N = 52
S = 31 + 48 = 79

$s_3 = 8$ → N = 52
S = 31 + 52 = 83

$2 \to N = 0 + f_3^*(S_2)$
$S = 44 + f_3^*(S_2 - 4)$

$S_2 = 4 \to N = 35$
$S = 44 + 0 = 44$

$S_2 = 5 \to N = 48$
$S = 44 + 4 = 48$

$S_2 = 6 \to N = 52$
$S = 44 + 31 = 75$

$S_2 = 7 \to N = 79$
$S = 44 + 35 = 79$

$S_2 = 8 \to N = 83$
$S = 44 + 35 = 79$

$1 \to N = 0 + f_2^*(8) = 83$
$S = 40 + f_2^*(8 - 3 = 5) = 40 + 48 = 88$

$f_1^*(8) = 88 \quad d_1^*(8) = S$

valore ottimo del problema

Soluzioni:

$d_1^*(8) = S1 \to S_2^* = 5$

(a) $d_2^*(5) = N \to S_3^* = 5 \to d_3^*(5) = N \to S_4^* = 5 \to d_4^*(5) = S1 \to S_5^* \overset{5-5}{=} 0 \to d_5^*(0) = N$

(b) $d_2^*(5) = S \to S_3^* \overset{5-4}{=} 1 \to d_3^*(1) = N \to S_4^* = 1 \to d_4^*(1) = N \to S_5^* = 1 \to d_5^*(1) = S$

(a) inserisce gli oggetti 1 e 4
(b) inserisce gli oggetti 1, 2, 5.

Esercizio 4

I blocchi sono le componenti (3).
Per ogni blocco gli stati disponibili sono il budget residuo (0, 1000, 2000...)
Le decisioni che possiamo prendere sono acquistare la versione base, avanzata-1 o avanzata-2 o non acquistare nulla per mancanza di budget.

$$D_3 = \begin{cases} \emptyset & \text{se } S_3 < 2 \\ \{B\} & \text{se } S_3 \in \{2,3\} \\ \{B, A_1\} & \text{se } S_3 = 4 \\ \{B, A_1, A_2\} & \text{se } S_3 \in \{5, \dots, 10\} \end{cases}$$

$U(B, S_3) = 0{,}5$
$U(A_1, S_3) = 0{,}7$
$U(A_2, S_3) = 0{,}9$

Il contributo della decisione presa è dato dall'affidabilità della versione scelta

	f_3^*	d_3^*	f_2^*	d_2^*
0	–	–	–	–
1	–	–	–	–
2	0,5	B	–	–
3	0,5	B	–	–
4	0,7	A_1	–	–
5	0,9	A_2	0,35	B
6	0,9	A_2	0,35	B
7	0,9	A_2	0,49	B
8	0,9	A_2	0,63	B
9	0,9	A_2	0,63	B
10	0,9	A_2	0,72	A_1

Nel blocco 1 avrò:

$$B \to 0,6 \cdot f_2^*(10-1) = 0,378$$
$$A_1 \to 0,8 \cdot f_2^*(10-2) = \boxed{0,504}$$
$$A_2 \to 0,9 \cdot f_2^*(10-3) = 0,441$$

La massima affidabilità garantita dal budget è 0,504, ottenuta acquistando

COMP 1 $\to A_1$ BUDGET $S_2 = 8$

COMP 2 $\to B$ BUDGET $S_3 = 5$

COMP 3 $\to A_2$ BUDGET $= 0$

$$D_2 = \begin{cases} \phi & \text{se } S_2 < 3 \\ \{B\} & \text{se } S_2 \in \{3,4\} \\ \{B, A_1\} & \text{se } S_2 = 5 \\ \{B, A_1, A_2\} & \text{se } S_2 \in \{6, \dots, 10\} \end{cases}$$

La funzione di transizione è:

$$t(S_2, B) = S_2 - 3$$
$$t(S_2, A_1) = S_2 - 5$$
$$t(S_2, A_2) = S_2 - 6$$

$$\underbrace{U(S_2, d_2)}_{\text{contributo componente 2}} \overset{\text{prodotto}}{*} f_3^*(t(S_2, d_2))$$

Nel caso della seconda componente:

$B \to 0,7 \cdot f_3^*(S_2 - 3)$ se $S_2 = 3$ o 4, $B \to 0,7 \cdot - = -$

$A_1 \to 0,8 \cdot f_3^*(S_2 - 5)$

$A_2 \to 0,9 \cdot f_3^*(S_2 - 6)$

$S_2 = 6$	$S_2 = 7$	$S_2 = 8$	$S_2 = 9$	$S_2 = 10$
$B \to 0{,}7 \cdot f_3^*(3) = 0{,}35$	$B \to 0{,}49$	$B \to 0{,}63$	$B \to 0{,}63$	$B \to 0{,}63$
$A_1 \to 0{,}8 \cdot f_3^*(1) = -$	$A_1 \to 0{,}40$	$A_1 \to 0{,}40$	$A_1 \to 0{,}56$	$A_1 \to 0{,}72$
$A_2 \to 0{,}9 \cdot f_3^*(0) = -$	$A_2 \to$ ~~e~~	$A_2 \to 0{,}45$	$A_2 \to 0{,}45$	$A_2 \to 0{,}63$

Esercizi non lineari

1) MIN $f(x,y) = e^{x^2} - 3x^3y + 27xy$

- Si dimostri che il punto $(1,4)$ non è un minimo locale

Verifico le condizioni necessarie del primo ordine $(\nabla f(x,y) = 0)$ e, eventualmente del secondo ordine $(\nabla^2 f(x,y) \geq 0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x e^{x^2} - 9x^2y + 27y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -3x^3 + 27x$$

$\nabla f(1,4) = (2e - 36 + 108, -3 + 27) \neq 0$. Il punto non è di minimo locale non essendo un punto stazionario.

- Si individui la direzione dell'antigradiente in $(1,4)$.

$$-\nabla f(1,4) = \begin{pmatrix} -72 - 2e \\ -24 \end{pmatrix}$$

Con il metodo dell'antigradiente dovremmo effettuare una ricerca su

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 72 + 2e \\ 24 \end{pmatrix} \qquad \lambda \geq 0$$

- Calcolare la direzione di Newton nel punto $(1,4)$

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2} - 18xy & -9x^2 + 27 \\ -9x^2 + 27 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d = -\left[\nabla^2 f(x,y)\right]^{-1} \cdot \nabla f(x,y) \qquad d(1,1) = -\left[\nabla^2 f(1,1)\right]^{-1} \cdot \nabla f(1,1)$$

$$\nabla^2 f(1,1) = \begin{bmatrix} 6e-72 & 18 \\ 18 & 0 \end{bmatrix} \qquad \left[\nabla^2 f(1,1)\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -18 \\ -18 & 6e-72 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{18^2}$$

La direzione di Newton è definita (essendo $\nabla^2 f(1,1)$ invertibile)

$$d(1,1) = -\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{18} & \frac{6e-72}{18^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 72+2e \\ 24 \end{pmatrix}$$

- Trovare i punti stazionari della $f(x,y)$.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xe^{x^2} - 9x^2y + 27y \\ -3x^3 + 27x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2xe^{x^2} - 9x^2y + 27y = 0 \\ -3x^3 + 27x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dots \\ 3x(-x^2+9) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x=0 \\ x=\pm 3 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ 27y=0 \to y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ 6e^9 - 81y + 27y = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x=3 \\ y = \frac{6e^9}{54} = \frac{e^9}{9} \end{cases} \quad \begin{cases} x=-3 \\ -6e^9 - 81y + 27y = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x=-3 \\ y = -\frac{e^9}{9} \end{cases}$$

I punti stazionari sono $O(0,0)$, $A\left(3, \frac{e^9}{9}\right)$, $B\left(-3, -\frac{e^9}{9}\right)$

- Trovare i minimi locali della funzione.

La ricerca è ristretta ai punti stazionari. L'hessiano in quei punti deve essere una matrice definita positiva. Ma:

$$\det\left(\nabla^2 f(x,y)\right) = -(27-9x^2)^2 < 0 \quad \forall x \neq \pm\sqrt{3}$$

Quindi devo avere un autovalore positivo e uno negativo, quindi la matrice non è definita positiva. Non esistono quindi punti di minimo locale

I tre punti trovati sono punti di sella perché non sono neppure punti di massimo ($\nabla^2 f(x,y)$ non è neppure definita negativa).

② $\text{MIN} \ -x^3+(y-1)^2$

$-x^2+y \geq 0$

$-x^2-y+2 \geq 0$

• Si scriva la funzione lagrangiana

$$\mathcal{L}(\underbrace{x,y,\mu_1,\mu_2}_{\text{moltiplicatori di Lagrange}}) = \underbrace{-x^3+(y-1)^2}_{f(x,y)} \underbrace{-\mu_1(y-x^2)}_{\mu_1 \cdot 1° \text{ vincolo}} \underbrace{-\mu_2(2-y-x^2)}_{\mu_2 \cdot 2° \text{ vincolo}} =$$

2 vincoli = 2 μ!

$$= -x^3+(y-1)^2-\mu_1 y+\mu_1 x^2-2\mu_2+\mu_2 y+\mu_2 x^2.$$

• Si scrivano le condizioni KKT

$$\nabla_{x,y}\mathcal{L} = \begin{pmatrix} -3x^2+2\mu_1 x+2\mu_2 x \\ 2(y-1)-\mu_1+\mu_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -3x^2+2\mu_1 x+2\mu_2 x=0 \\ 2(y-1)-\mu_1+\mu_2=0 \\ -x^2+y\geq 0 \\ -x^2-y+2\geq 0 \\ \mu_1,\mu_2\geq 0 \\ \mu_1(-x^2+y)=0 \\ \mu_2(-x^2-y+2)=0 \end{cases}$$

impongo l'ammissibilità, cioè i vincoli → $-x^2+y\geq 0$, $-x^2-y+2\geq 0$

moltiplicatori dei vincoli di uguaglianza ≥0 → $\mu_1,\mu_2\geq 0$

condizioni di complementarietà → $\mu_1(-x^2+y)=0$, $\mu_2(-x^2-y+2)=0$

• Stabilire se i punti $(0,0)$, $(-1,1)$, $(0,1)$, $(1,1)$ soddisfano le condizioni KKT.

$(0,0)$ $\begin{cases} 0=0 \ ✓ \\ -2-\mu_1+\mu_2=0 \\ 0\geq 0 \ ✓ \\ 2\geq 0 \ ✓ \\ \mu_1,\mu_2\geq 0 \\ 0=0 \ ✓ \end{cases}$ $\begin{cases} -2-\mu_1+\mu_2=0 \\ 2\mu_2=0 \\ \mu_1,\mu_2\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \mu_1=-2<0 \\ \mu_2=0 \\ \mu_1,\mu_2\geq 0 \end{cases}$ Non soddisfatte

$(-1,1)$ $\quad -3-2\mu_1-2\mu_2=0 \rightarrow \mu_1+\mu_2=-\frac{3}{2}$ almeno uno negativo

$-\mu_1+\mu_2=0$

$\vdots$

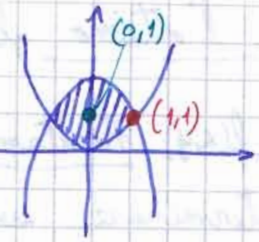
<u>Non soddisfatte</u>

$(0,1)$

$$\begin{cases} 0=0 \ \checkmark \\ -\mu_1+\mu_2=0 \\ 1\geq 0 \ \checkmark \\ 1\geq 0 \ \checkmark \\ \mu_1,\mu_2\geq 0 \\ \mu_1=0 \\ \mu_2=0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \mu_1=0 \\ \mu_2=0 \end{array}$$

<u>Condizioni soddisfatte</u> per $\mu_1=0=\mu_2$

Se perturbiamo i due vincoli non andiamo a perturbare la funzione obiettivo. Infatti,



$(1,1)$ $\begin{cases} -3+2\mu_1+2\mu_2=0 \\ -\mu_1+\mu_2=0 \\ \vdots \end{cases} \quad \begin{cases} 4\mu_2=3 \\ \mu_1=\mu_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \mu_2=3/4 \\ \mu_1=3/4 \end{cases}$ <u>Condizioni soddisfatte</u> per $\mu_1=\frac{3}{4}=\mu_2$

In questo punto, se sposto leggermente i vincoli avrò un cambiamento nel valore ottimo della funzione.

③ $\min x^2+y^2$

$y-e^{-x}\geq 0$

• <u>Dimostrare che è un problema di programmazione convessa.</u>

(a) La funzione obiettivo deve essere convessa.

$f(x,y)=x^2+y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}=2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=2y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=0$

$\nabla^2 f(x,y)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ gli autovalori sono 2 e 2 entrambi positivi.

$f(x,y)$ è strettamente convessa.

(b) I vincoli devono essere funzioni concave.

$$c(x,y) = y - e^{-x} \qquad \frac{\partial c}{\partial x} = e^{-x} \qquad \frac{\partial c}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = -e^{-x} \qquad \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\nabla^2 c(x,y) = \begin{pmatrix} -e^{-x} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ gli autovalori sono $-e^{-x}$ e 0.

$-e^{-x} < 0 \ \forall x$, quindi $c(x,y)$ è concava. ∎

- Trovare l'ottimo globale del problema.

Essendo $f(x,y)$ strettamente convessa, se l'ottimo esiste è unico.
Devo determinare un punto che soddisfa le condizioni KKT.

$$\mathcal{L}(x,y,\mu) = x^2 + y^2 - \mu(y - e^{-x}) = x^2 + y^2 - \mu y + \mu e^{-x}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x - \mu e^{-x} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y - \mu$$

Le condizioni KKT sono

$$\begin{cases} 2x - \mu e^{-x} = 0 \\ 2y - \mu = 0 \\ y - e^{-x} \geq 0 \\ \mu \geq 0 \quad \text{già verificata} \\ \mu(y - e^{-x}) = 0 \end{cases}$$

$2y - \mu = 0 \rightarrow \left.\begin{matrix} \mu = 2y > 0 \\ y \geq e^{-x} > 0 \end{matrix}\right\} \mu > 0$

$\mu > 0,\ \mu(y - e^{-x}) = 0 \Leftrightarrow y = e^{-x}$

$$\begin{cases} \mu = 2e^{-x} \\ y = e^{-x} \\ x = e^{-2x} \end{cases}$$

Il punto esiste ed è unico, infatti

- Impostare e risolvere il duale di Wolfe

$$\max_{x,y,\mu} \; x^2+y^2-\mu y+\mu e^{-x}$$ massimizzare Lagrangiana

$2x-\mu e^{-x}=0$ prima condizione KKT

$2y-\mu=0$ seconda condizione KKT

(gradiente della lagrangiana $=0$)

$\mu \geq 0$

$\downarrow$

$\max \; x^2+y^2-2y^2+2x$

$2x-2ye^{-x}=0$

$\mu=2y$

$\mu\geq 0$

$\rightarrow$

$\max \; x^2-y^2+2x$

$x=ye^{-x}$

$y\geq 0$

$\rightarrow$

$\max \; x^2-x^2e^{2x}+2x$

$y=xe^{x}$

$y\geq 0$

$\max \; x^2(1-e^{2x})+2x$

$x\geq 0$

Trovo punti stazionari $f(x)=x^2(1-e^{2x})+2x$

$f'(x)=2x(1-e^{2x})+x^2\cdot(-2e^{2x})+2=2x-2xe^{2x}-2x^2e^{2x}+2=0 \; \ldots$